# 1. ECOULEMENTS

## EXERCICE 1

### Section triangulaire :

$l = 2h\tan\alpha \quad S = \dfrac{l}{2}\times h = \dfrac{2h\tan\alpha}{2}\times h = h^2\tan\alpha$

$P = ABC = 2\times\dfrac{h}{\cos\alpha}$

$$R_H = \frac{S}{P} = \frac{h^2\tan\alpha}{2\dfrac{h}{\cos\alpha}} = \frac{h^2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\dfrac{h}{\cos\alpha}} = \frac{h}{2}\sin\alpha$$

$D_H = 4\times R_H = 2h\sin\alpha$

### Section trapézoïdale :

$l = b + 2h\tan\alpha \qquad S = bh + h^2\tan\alpha$

$P = ABCD = b + 2\times\dfrac{h}{\cos\alpha}$

$$R_H = \frac{S}{P} = \frac{bh + h^2\tan\alpha}{b + 2\times\dfrac{h}{\cos\alpha}} = \frac{h(b\cos\alpha + h\sin\alpha)}{b\cos\alpha + 2h}$$

$$D_H = 4\times R_H = \frac{4h(b\cos\alpha + h\sin\alpha)}{b\cos\alpha + 2h}$$

### Section rectangulaire :

$S = bh \qquad P = 2h + b$

$$R_H = \frac{S}{P} = \frac{bh}{2h+b}$$

$$D_H = 4\times R_H = \frac{4bh}{2h+b}$$

### Conduite circulaire de diamètre D = 2R avec surface libre :

$$h = R(1+\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = Arc\cos\left(\frac{h}{R} - 1\right)$$

$$S = R^2\left[(\pi - \alpha) + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right] \qquad P = 2R(\pi - \alpha)$$

$$R_H = \frac{S}{P} = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{\sin 2\alpha}{2(\pi - \alpha)}\right]$$

*α est exprimé en radians !!*

**ex 1** : $h = 1{,}5R$

$$\alpha = Arc\cos(1{,}5 - 1) = 60° = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

$$R_H = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{\sin(2\pi/3)}{2(\pi - \pi/3)}\right]$$

$$R_H = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{3}/2}{4\pi/3}\right] = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\right] \approx 0{,}6R$$

**ex 2** : $h = R$

$$\alpha = Arc\cos(1 - 1) = 90° = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

$$R_H = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{\sin\pi}{2(\pi - \pi/2)}\right] = \frac{R}{2}[1+0] = \frac{R}{2}$$

### Conduite circulaire de diamètre D = 2R en charge :

$S = \pi R^2 \qquad P = 2\pi R$

$$R_H = \frac{S}{P} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$$

$$D_H = 4\times R_H = \frac{4R}{2} = 2R = D$$

*Dans une conduite circulaire en charge, le diamètre hydraulique est égal au diamètre géométrique de la conduite.*

### EXERCICE 2

$$Q_V = \frac{3000 \text{ L}}{1 \text{ min}} = \frac{3000 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}} = 0{,}05 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$$

Expression littérale :

$$Q_V = V \times S = V \times \frac{\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4 \cdot Q_V}{\pi D^2}$$

Le liquide étant incompressible, le débit est constant.

Application numérique :

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q_V}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0{,}05}{\pi \times \left(120 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 4{,}42 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot Q_V}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0{,}05}{\pi \times \left(200 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 1{,}59 \text{ m.s}^{-1}$$

### EXERCICE 3

1) $Q_V = V \times S = V \times \dfrac{\pi D^2}{4}$ et $Q_m = \rho \times Q_V$

Application numérique :

$$Q_V = 1{,}2 \times \frac{\pi\left(12{,}7 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4} = 1{,}52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q_m = 820 \times 1{,}52 \cdot 10^{-4} = 0{,}125 \text{ kg.s}^{-1}$$

2) $Q_V = V \times \dfrac{\pi D^2}{4} = 2{,}1 \times \dfrac{\pi\left(3 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4} = 1{,}48 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$

$$Q_V = \frac{Vol}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{Vol}{Q_V} = \frac{3{,}82 \cdot 10^{-6}}{1{,}58 \cdot 10^{-5}} = 0{,}26 \text{ s}$$

## 2. ECOULEMENTS EN CHARGE

### EXERCICE 4

1) Bernoulli en pression : $\rho g z + \dfrac{1}{2}\rho V^2 + p = \text{cste}$

$$\rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^{\,2} + p_1 = \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^{\,2} + p_2$$

or $V_1 = V_2$ ; en effet, la section de la canalisation est constante ainsi que le débit :

$$\rho g z_1 + p_1 = \rho g z_2 + p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = \rho g z_1 - \rho g z_2 = \rho g\left(z_1 - z_2\right)$$

soit $\Delta p = -\rho g \cdot \Delta z$ : on retrouve la formule de l'hydrostatique avec l'axe des altitudes orienté vers le haut.

2) Application numérique : $\Delta p = -\rho g \cdot \Delta z = -1000 \times 10 \times 5 = -50000 \text{ Pa} = \text{-}0{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

3) variation relative comparée à la pression atmosphérique :

$$\frac{\Delta p}{p_{atm}} = \frac{-0{,}5\cdot 10^5}{1\cdot 10^5}\times 100 = -50\ \%$$

## EXERCICE 5

1) $Q_V = \dfrac{16{,}3\ \text{m}^3}{1\ \text{h}} = \dfrac{16{,}3\ \text{m}^3}{3600\ \text{s}} = 4{,}53\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3.\text{s}^{-1}$

Le liquide étant incompressible, le débit est constant.

$$Q_V = V\times S = V\times\frac{\pi D^2}{4} \quad\Rightarrow\quad V = \frac{4\cdot Q_V}{\pi D^2}$$

Application numérique :

$$V_1 = \frac{4\cdot Q_V}{\pi D_1^2} = \frac{4\times 4{,}53\cdot 10^{-3}}{\pi\times\left(12\cdot 10^{-2}\right)^2} = 0{,}4\ \text{m.s}^{-1}$$

$$V_2 = \frac{4\cdot Q_V}{\pi D_2^2} = \frac{4\times 4{,}53\cdot 10^{-3}}{\pi\times\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2} = 14{,}4\ \text{m.s}^{-1}$$

2) Bernoulli entre 1 et 2, avec les deux conduites dans le même plan horizontal : $z_1 = z_2$

$$\rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1 = \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + p_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + p_2$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(V_1^2 - V_2^2\right) + p_1$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\times 1000\times\left(0{,}4^2 - 14{,}4^2\right) + 4\cdot 10^5 \approx 3\cdot 10^5\ \text{Pa}$$

Bernoulli entre 1 et 2, avec la conduite 2 située 12 m plus haut que la conduite 1 : $z_2 - z_1 = 12$ m

$$\rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1 = \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + p_2$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(V_1^2 - V_2^2\right) + p_1 - \rho g\left(z_2 - z_1\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\times 1000\times\left(0{,}4^2 - 14{,}4^2\right) + 4\cdot 10^5 - 1000\times 10\times 12 \approx 1{,}8\cdot 10^5\ \text{Pa}$$

## EXERCICE 6

1) Le liquide étant incompressible, le débit de l'écoulement est constant :

$$Q_V = S_M\cdot V_M = S_N\cdot V_N \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi D^2}{4}\cdot V_M = \frac{\pi d^2}{4}\cdot V_N \quad\Rightarrow\quad D^2\cdot V_M = d^2\cdot V_N$$

$$V_N = V_M\left(\frac{D}{d}\right)^2$$

2) Bernoulli entre M et N, avec $z_M = z_N$ :

$$\rho g z_M + \frac{1}{2}\rho V_M{}^2 + p_M = \rho g z_N + \frac{1}{2}\rho V_N{}^2 + p_N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho V_M{}^2 + p_M = \frac{1}{2}\rho V_N{}^2 + p_N$$

$$p_N - p_M = -\frac{1}{2}\rho\left(V_N{}^2 - V_M{}^2\right)$$

Statique :

dans l'eau :

$$p_N = p_{N'} - \rho g \cdot NN' \quad \text{et} \quad p_M = p_{M'} - \rho g \cdot MM'$$

$$p_N - p_M = \left(p_{N'} - \rho g \cdot NN'\right) - \left(p_{M'} - \rho g \cdot MM'\right) = p_{N'} - p_{M'} - \rho g\left(NN' - MM'\right)$$

$$p_N - p_M = p_{N'} - p_{M'} + \rho g h$$

dans le mercure : $p_{N'} - p_{M'} = -\rho_{\mathrm{Hg}} g h$

finalement :

$$p_N - p_M = -\rho_{\mathrm{Hg}} g h + \rho g h = \left(\rho - \rho_{\mathrm{Hg}}\right) g h$$

3) On égalise les deux relations trouvées par les deux méthodes :

$$p_N - p_M = -\frac{1}{2}\rho\left(V_N{}^2 - V_M{}^2\right) = \left(\rho - \rho_{\mathrm{Hg}}\right) g h$$

et on introduit la relation trouvée en 1) :

$$-\frac{1}{2}\rho\left(\left(V_M\left(\frac{D}{d}\right)^2\right)^2 - V_M{}^2\right) = \left(\rho - \rho_{\mathrm{Hg}}\right) g h \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\rho\left(V_M{}^2\left(\frac{D}{d}\right)^4 - V_M{}^2\right) = \left(\rho - \rho_{\mathrm{Hg}}\right) g h$$

$$-\frac{1}{2}\rho V_M{}^2\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right] = \left(\rho - \rho_{\mathrm{Hg}}\right) g h \quad \Rightarrow \quad V_M{}^2 = \frac{\left(\rho - \rho_{\mathrm{Hg}}\right) g h}{-\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right]}$$

$$V_M = \sqrt{\frac{2\left(\rho_{\mathrm{Hg}} - \rho\right) g h}{\rho\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right]}}$$

## EXERCICE 7

Bernoulli généralisé entre la prise d'eau 1 et la restitution 2 :

$$\left(z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}\right) - \left(z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g}\right) = \frac{P_f + P}{\rho g Q_V}$$

Avec $p_1 = p_2 = p_{atm}$, et $V_1 = V_2$ car D et $Q_V$ sont constants.
Par ailleurs, les pertes de charges = $-\Delta h < 0$.
Il vient donc finalement :

$$z_2 - z_1 = -\Delta h + \frac{P}{\rho g Q_V} \quad \Rightarrow \quad P = \rho g Q_V\left(z_2 - z_1 + \Delta h\right)$$

Application numérique : $P = 1000 \times 9{,}81 \times 0{,}3 \times \left(248 - 360 + 1{,}1\right) = -326000 \text{ W} = -326 \text{ kW}$

La puissance est négative car l'eau fournit de la puissance à la turbine.

## EXERCICE 8

11. Les points 1 et 3 sont à la pression atmosphérique : $p_1 = p_2 = p_{atm} = 10^5$ Pa

12. $Q_V = V \times S = \quad \Rightarrow \quad V = \dfrac{Q_V}{S}$ ; et le débit volumique $Q_V$ est constant (liquide incompressible).

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{\dfrac{Q_V}{s}}{\dfrac{Q_V}{S_A}} = \frac{S_A}{s} = \frac{10}{10^{-3}} = 10000$$

La vitesse au point 3 est 10.000 fois plus grande que celle au point 1 : on peut négliger $V_1$ devant $V_3$.

13. Bernoulli entre 1 et 3 (fluide parfait : pas de pertes de charge par frottement) :

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{V_3^2}{2g}$$

$$V_3 = \sqrt{2gz_1}$$

Lors de la vidange du réservoir, $z_1$ diminue : donc $V_3$ diminue au cours du temps.

14. $V_3 = \sqrt{2gz_1} = \sqrt{2 \times 10 \times 20} = 20 \text{ m.s}^{-1}$

21. Bernoulli entre 2 et 3 (pas de pertes de charges et même vitesse dans la conduite) :

$$z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} = z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - z_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_{atm} - \rho g z_2$$

Application numérique : $p_2 = 10^5 - 1000 \times 10 \times 5 = 50000 \text{ Pa} = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

$p_2 < p_{atm}$ : si le tube est souple il va être comprimé par l'atmosphère et sa section va diminuer.

22. Bernoulli entre le point de cote z et le point 3 :

$$z + \frac{p_{sat}}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{p_{atm} - p_{sat}}{\rho g}$$

$$z = \frac{10^5 - 2{,}4 \cdot 10^3}{1000 \times 10} = 9{,}76 \text{ m}$$

A cette cote l'eau va se vaporiser : apparition de bulles.

## EXERCICE 9

1. Bernoulli entre A et C : $V_A = 0$, $Q_V$ = cste, pas de pertes de charge

$$z_A + \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = z_C + \frac{V_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad z_A + \frac{p_A}{\rho g} = z_C + \frac{V_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\rho g}$$

$$\frac{V_C^2}{2g} = z_A - z_C + \frac{p_A}{\rho g} - \frac{p_C}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad V_C = \sqrt{2g(z_A - z_C) + \frac{2(p_A - p_C)}{\rho}}$$

$$V_C = \sqrt{2 \times 10 \times (363 - 353) + \frac{2 \times (1{,}01 \cdot 10^5 - 1{,}1 \cdot 10^5)}{1000}} = 13{,}5 \text{ m.s}^{-1}$$

2. $Q_V = V \times S = V_C \times \dfrac{\pi d^2}{4} = 13{,}5 \times \dfrac{\pi\left(700 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4} = 5{,}14 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$

3. B et C dans la même conduite de section constante, fluide incompressible : $V_B = V_C$

4. Bernoulli entre A et B :

$$z_A + \frac{V_A{}^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = z_B + \frac{V_B{}^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad z_A + \frac{p_A}{\rho g} = z_B + \frac{V_C{}^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g}$$

$$\frac{p_B}{\rho g} = z_A - z_B + \frac{p_A}{\rho g} - \frac{V_C{}^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad p_B = \rho g\left(z_A - z_B\right) + p_A - \frac{\rho V_C{}^2}{2}$$

$$p_B = 1000 \times 10 \times \left(363 - 361\right) + 1{,}01 \cdot 10^5 - \frac{1000 \times 13{,}5^2}{2} = 29875 \text{ Pa}$$

5. Bernoulli généralisé entre C et D, avec P la puissance fournie par l'eau à la turbine.

$$\left(z_D + \frac{V_D{}^2}{2g} + \frac{p_D}{\rho g}\right) - \left(z_C + \frac{V_C{}^2}{2g} + \frac{p_C}{\rho g}\right) = \frac{P}{\rho g Q_V} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_D - p_C}{\rho g} = \frac{P}{\rho g Q_V}$$

$$P = \rho g Q_V \frac{p_D - p_C}{\rho g} = Q_V\left(p_D - p_C\right)$$

$$P = 5{,}14 \times \left(1{,}01 \cdot 10^5 - 1{,}1 \cdot 10^5\right) = -46260 \text{ W} = -46 \text{ kW}$$

## EXERCICE 10

1) $V = \dfrac{Q_V}{S} = 4\dfrac{Q_V}{\pi D^2} = 4 \times \dfrac{2{,}8 \cdot 10^{-3}}{\pi \times \left(135 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 0{,}2 \text{ m.s}^{-1}$

2) $\text{Re} = \dfrac{VD}{\nu} = \dfrac{\rho VD}{\mu} = \dfrac{1000 \times 0{,}2 \times 135 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 27000 = 2{,}7.10^4$

2 000 < Re < $10^5$ : écoulement turbulent lisse.

3) Abaque : $\lambda = 0{,}025$

Perte de charge linéaire : $\Delta h = \lambda \dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g} = 0{,}025 \times \dfrac{65}{135 \cdot 10^{-3}} \times \dfrac{0{,}2^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}025 \text{ mCE}$

4) Théorème de Bernoulli généralisé entre les points (1) et (2) :

$\left(z_2 - z_1\right) + \dfrac{1}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + \dfrac{1}{\rho g}\left(p_2 - p_1\right) = H - \Delta h$ avec $V_1 = V_2$ et $p_1 = p_2$ :

$$\left(z_2 - z_1\right) = H - \Delta h \quad \Rightarrow \quad H = z_2 - z_1 + \Delta h = \frac{P_{net}}{\rho g Q_V}$$

$$P_{net} = \left(z_2 - z_1 + \Delta h\right)\rho g Q_V = \left(35 - 0 + 0{,}025\right) \times 1000 \times 2{,}8 \cdot 10^{-3} \times 9{,}81 = 962 \text{ W}$$

5) $\eta = \dfrac{P_{net}}{P_a} \quad \Rightarrow \quad P_a = \dfrac{P_{net}}{\eta} = \dfrac{962}{0{,}80} = 1202 \text{ W}$

Calculs faits en négligeant les pertes de charge singulières : leur prise en compte va entraîner une augmentation de la puissance de pompage.

## EXERCICE 11

1) $V = \dfrac{Q_V}{S} = 4\dfrac{Q_V}{\pi d^2} = 4 \times \dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi \times \left(130 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 0{,}15 \text{ m.s}^{-1}$

2) $\mathrm{Re} = \dfrac{VD}{\nu} = \dfrac{\rho VD}{\mu} = \dfrac{1000 \times 0{,}15 \times 130 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 19\,500$

3) 2 000 < Re < $10^5$ : écoulement turbulent lisse.

4) Abaque : $\lambda = 0{,}0267$

5) Perte de charge linéaire :

$$\Delta h_l = \lambda \frac{L_1 + L_2 + L_3}{D} \times \frac{V^2}{2g} = 0{,}0267 \times \frac{10 + 12 + 8}{130 \cdot 10^{-3}} \times \frac{0{,}15^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}007 \text{ mCE}$$

6) Perte de charge singulière :

$$\Delta h_s = \sum \left( k \frac{V^2}{2g} \right) = 2 \times k_S \times \frac{V^2}{2g} = 2 \times 0{,}33 \times \frac{0{,}15^2}{2 \times 9{,}81} = 7{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ mCE}$$

7) Théorème de Bernoulli généralisé entre les points (1) et (2) :

$\left(z_2 - z_1\right) + \dfrac{1}{2g}\left(V_2^{\,2} - V_1^{\,2}\right) + \dfrac{1}{\rho g}\left(p_2 - p_1\right) = H - \Delta h$ avec $V_1 = V_2$ ; $p_1 = p_2 = P_{atm}$ et $\Delta h = \Delta h_l + \Delta h_s$ :

$$\left(z_2 - z_1\right) = H - \left(\Delta h_l + \Delta h_s\right) \quad \Rightarrow \quad H = z_2 - z_1 + \Delta h_l + \Delta h_s = \frac{P_{net}}{\rho g Q_V}$$

$$P_{net} = \left(z_2 - z_1 + \Delta h_l + \Delta h_s\right) \rho g Q_V = \left(10 - 0 + 0{,}007 + 7{,}57 \cdot 10^{-4}\right) \times 1000 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 9{,}81 = 196 \text{ W}$$

8) $\eta = \dfrac{P_{net}}{P_a} \quad \Rightarrow \quad P_a = \dfrac{P_{net}}{\eta} = \dfrac{196}{0{,}70} = 280{,}5 \text{ W}$

## EXERCICE 12

1) $V = \dfrac{Q_V}{S} = 4\dfrac{Q_V}{\pi D^2} = 4 \times \dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi \times \left(30 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 2{,}83 \text{ m.s}^{-1}$

2) $\mathrm{Re} = \dfrac{VD}{\nu} = \dfrac{\rho VD}{\mu} = \dfrac{1000 \times 2{,}83 \times 30 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 84\,900$

3) 2 000 < Re < $10^5$ : écoulement turbulent lisse.

4) Abaque : $\lambda = 0{,}0185$

5) Perte de charge linéaire : $\Delta h_l = \lambda \dfrac{L}{D} \times \dfrac{V^2}{2g} = 0{,}0185 \times \dfrac{15}{30 \cdot 10^{-3}} \times \dfrac{2{,}83^2}{2 \times 9{,}81} = 3{,}778 \text{ mCE}$

6) Perte de charge singulière : $\Delta h_s = k_S \times \dfrac{V^2}{2g} = 0{,}3 \times \dfrac{2{,}83^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}122 \text{ mCE}$

7) Théorème de Bernoulli généralisé entre les points (1) et (2) :

$(z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho g}(p_2 - p_1) = H - \Delta h$ avec $V_1 = V_2$ ; $p_1 = p_2 = P_{atm}$ et $\Delta h = \Delta h_l + \Delta h_s$ :

$$(z_2 - z_1) = H - (\Delta h_l + \Delta h_s) \quad \Rightarrow \quad H = z_2 - z_1 + \Delta h_l + \Delta h_s = \frac{P_{net}}{\rho g Q_V}$$

$$P_{net} = (z_2 - z_1 + \Delta h_l + \Delta h_s)\rho g Q_V = (10 - 3 + 3{,}778 + 0{,}122) \times 1000 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 9{,}81 = 214 \text{ W}$$

8) $\eta = \frac{P_{net}}{P_a} \quad \Rightarrow \quad P_a = \frac{P_{net}}{\eta} = \frac{214}{0{,}75} = 285 \text{ W}$

## EXERCICE 13

1- Vitesse de l'écoulement en fonction du diamètre D de la conduite : $V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2}$

2- Il y a conversion de l'énergie de potentielle de pesanteur en énergie cinétique + pertes d'énergie :

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + mg\Delta h \quad \Rightarrow \quad h = \Delta h + \frac{V^2}{2g}$$

3- $\Delta h = \left(\frac{\lambda L}{D} + K\right)\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{\lambda L}{D} + K\right)\frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4}$

4- $h = \Delta h + \frac{V^2}{2g} = \left(\frac{\lambda L}{D} + K\right)\frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} = \left(\frac{\lambda L}{D} + K + 1\right)\frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4}$

$$D^4 = \left(\frac{\lambda L}{D} + K + 1\right)\frac{8Q^2}{\pi^2 g h}$$

$$V_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 3} = 7{,}67 \text{ m.s}^{-1} \qquad D_0 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_0}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}175}{\pi \times 7{,}67}} = 0{,}17 \text{ m}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}_0 &= \frac{V_0 D_0}{\nu} = \frac{7{,}67 \times 0{,}17}{1{,}1 \cdot 10^{-6}} = 1{,}2 \cdot 10^6 \\ \frac{\varepsilon}{D_0} &= \frac{0{,}01}{170} = 5{,}9 \cdot 10^{-5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_0 = 0{,}012 \text{ d'après le diagramme de Moody}$$

$$D = \left[\left(\frac{\lambda \times 15}{D} + 1{,}74 + 1\right)\frac{8 \times 0{,}175^2}{\pi^2 \times 9{,}8 \times 3}\right]^{1/4} = \left[0{,}0127 \times \frac{\lambda}{D} + 2{,}9 \cdot 10^{-4}\right]^{1/4}$$

5- $D_i = \left[0{,}0127 \times \frac{\lambda_{i-1}}{D_{i-1}} + 2{,}9 \cdot 10^{-4}\right]^{1/4} \qquad D_0 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_0}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}175}{\pi \times 7{,}67}} = 0{,}17 \text{ m}$

| $D_{i-1}$ | $V=\dfrac{4Q}{\pi D^2}$ | $\mathrm{Re}=\dfrac{VD}{\nu}$ | $\dfrac{\varepsilon}{D}$ | λ (abaque de Moody) | $D_i$ | $\dfrac{\lvert D_i-D_{i-1}\rvert}{D_{i-1}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,17 | 7,71 | 1,2E+06 | 0,0000059 | 0,012 | 0,186 | 9,2 % |
| 0,19 | 6,47 | 1,1E+06 | 0,0000054 | 0,012 | 0,183 | 1,6 % |
| 0,18 | 6,68 | 1,1E+06 | 0,0000055 | 0,012 | 0,183 | 0,3 % |
| 0,18 | 6,64 | 1,1E+06 | 0,0000055 | 0,012 | 0,183 | 0,1 % |
| 0,18 | 6,65 | 1,1E+06 | 0,0000055 | 0,012 | 0,183 | 0,0 % |

D = 18 cm

## 3. ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE

### EXERCICE 14

1. Section mouillée : $S = bh + h^2 \tan\alpha = 5h + 3h^2$

   Rayon hydraulique : $R_H = \dfrac{bh+mh^2}{b+2h\sqrt{1+m^2}} = \dfrac{5h+3h^2}{5+2h\sqrt{1+3^2}} = \dfrac{5h+3h^2}{5+2h\sqrt{10}}$

   Formule de Manning-Strickler : le débit dans le canal est $Q = K \cdot S \cdot R_H^{2/3} \cdot j^{1/2}$

   $$Q = 70 \times \left(5h+3h^2\right) \times \left(\frac{5h+3h^2}{5+2h\sqrt{10}}\right)^{2/3} \times \sqrt{0{,}001}$$

   Cette équation peut être résolue par itération, en tâtonnant pour les valeurs de h, sachant que l'on veut Q = 80 $m^3.s^{-1}$

| **h** (m) | **Q** ($m^3.s^{-1}$) |
|---|---|
| 2 | 56 |
| 2,5 | 91 |
| 2,3 | 76 |
| 2,4 | 83 |
| 2,35 | 79 |
| 2,36 | 80 |

La profondeur normale de l'eau est donc de 2,36 m.

2. On a donc finalement :

   $S = 5h + 3h^2 = 5 \times 2{,}36 + 3 \times 2{,}36^2 = 28{,}5 \text{ m}^2$ soit une vitesse : $V = \dfrac{Q}{S} = \dfrac{80}{28{,}5} = 2{,}81 \text{ m.s}^{-1}$

et $R_H = \dfrac{5h+3h^2}{5+2h\sqrt{10}} = \dfrac{5\times 2{,}36+3\times 2{,}36^2}{5+2\times 2{,}36\times\sqrt{10}} = 1{,}43\ \text{m}$ soit $D_H = 4\times R_H = 4\times 1{,}43 = 5{,}72\ \text{m}$

soit $\text{Re} = \dfrac{VD_H}{\nu} = \dfrac{2{,}81\times 5{,}72}{1{,}31\cdot 10^{-6}} = 1{,}2\cdot 10^7 > 3000$ : l'écoulement est turbulent.

*Annexe* : Démonstration de $R_H = \dfrac{bh+mh^2}{b+2h\sqrt{1+m^2}}$

$$R_H = \frac{S}{P} = \frac{bh+h^2\tan\alpha}{b+2\times\dfrac{h}{\cos\alpha}} = \frac{bh+h^2 m}{b+2h\times\dfrac{1}{\cos\alpha}}$$

or : $m^2 = \tan^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+m^2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+m^2}$